CONCOURS SPECIAL 1977

CALCUL NUMERIQUE

-:-:-:-:-:-:-:-:-

Documents autorisés : - Tables de valeurs numériques

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la correction accordera une grande importance à la disposition des calculs sous forme de tableaux et à leur clarté. Tous les calculs doivent figurer sur la copie.

La méthode d'interpolation linéaire (ou des parties proportionnelles) appliquée à l'équation : $g(x) = 0$ pour trouver une valeur approchée C_0 de la racine C comprise entre a et b, conduit à une erreur :

$$|C - C_0| \leqslant \frac{(b-a)^2}{8} \frac{M''}{m} \quad \text{où } m = \left|\frac{g(b) - g(a)}{b - a}\right| \text{ et } M'' \text{ un majorant sur } [a,b] \text{ de } |g''|.$$

(g'' dérivée seconde de g)

-:-:-:-:-:-:-:-:-

1°) Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^k} \cos \frac{x}{2^k}$ $(k \in \mathbb{N})$

1.1. Prouver que f est définie pour tout x réel.

1.2. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{10} f\left(\frac{x}{2}\right) + \cos x$

On admettra sans démonstration que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on peut dériver terme à terme ; ainsi, pour <u>x exprimé en radians</u>, on a :

$$f'(x) = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{20^k} \sin \frac{x}{2^k} \quad \text{etc ...}$$

(f' dérivée première de f)

2°) Pour calculer les valeurs prises par f lorsqu'on donne à x les valeurs suivantes :

$x_1 = \frac{\pi}{4}$ radians (soit 50 grades), $x_3 = \frac{3\pi}{4}$ rd, $x_5 = \frac{5\pi}{4}$ rd,

on pose :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{10^k} \cos \frac{x}{2^k} + R_4(x)$$

2.1. Donner un encadrement de R_4 valable pour les 3 valeurs précédentes de x.

2.2. Avec combien de décimales suffit-il de mener les calculs pour obtenir $f(x)$ à 5.10^{-6} près ? On donne l'encadrement :

$$0{,}707\ 106\ 78 < \cos \frac{\pi}{4} < 0{,}707\ 106\ 79$$

2.3. Faire un tableau de calculs donnant $f(x_1)$, $f(x_3)$, $f(x_5)$ à 5.10^{-6} près.

.../...

3°) 3.1. Calculer les valeurs prises par f lorsque l'on donne à x les valeurs suivantes :

$x_0 = 0$ rd ; $x_2 = \frac{\pi}{2}$ rd (Soit 100 gr) ; $x_4 = \pi$ rd ; $x_6 = \frac{3\pi}{2}$ rd.

On pourra utiliser la propriété du § 1.2.
Indiquer la précision des résultats.

3.2. Faire un tableau résumé des sept valeurs : $f(x_0)$, $f(x_1)$....., $f(x_6)$

4°) Pour calculer des valeurs prises par f' lorsque l'on donne à x des valeurs comprises entre 0 et $\frac{3\pi}{2}$ radians, on pose :

$$f'(x) = -\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{20^k} \sin \frac{x}{2^k} - \rho_3(x)$$

4.1. Donner un encadrement de $\rho_3(x)$ valable pour $x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ et préciser son sens.

4.2. Calculer f' pour $x_1 = \frac{\pi}{4}$ rd, $x_4 = \pi$ rd, $x_6 = \frac{3\pi}{2}$ rd à 5.10^{-6} près.

5°) Pour préciser le minimum de f sur $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, on cherche la plus petite valeur strictement positive α, qui annule la dérivée f'.

5.1. A l'aide de subtitutions, encadrer α par 2 valeurs α_1 et α_2 différentes de 10 grades. Donner, à l'aide d'une seule interpolation linéaire entre α_1 et α_2, une valeur approchée de α, notée α_0 exprimée en grades et en radians. Indiquer la précision du résultat.

On donne l'encadrement : $-0{,}156\ 434\ 47 < \sin 210\ \text{gr} < -0{,}156\ 434\ 46$

5.2. Calculer $f(\alpha_0)$, valeur approchée du minimum de f. En utilisant une formule de Taylor à l'ordre 2, indiquer avec quelle précision est connu ce minimum.

6°) A l'aide de tous les résultats précédents, construire sur la feuille de papier millimétré rapporté à un repère orthogonal x'0x , y'0y, le graphique de f lorsque x varie de 0 à $\frac{3\pi}{2}$ radians.

Sur l'axe des abscisses x'0x, π radians seront représentés par un segment de 10 centimètres de longueur ; sur l'axe des ordonnées, l'unité sera un segment de 10 centimètres de longueur.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail